MP*4 Séries de fonctions II

18 novembre 2016

1 Séries de fonctions répondant à des conditions données

1.1

a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est dénombrable. Construire une fonction strictement croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est $\mathbf{Q}$.
b) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que l'ensemble des points de non-dérivabilté de f est dénombrable. Construire une fonction convexe dont l'ensemble des points de non-dérivabilté est $\mathbf{Q}$.

1.2

Soit ϕ la fonction 2-périodique définie sur $[-1,1]$ par $\phi(x) = |x|$, et f la somme de la série $\sum(\frac{3}{4})^n\phi(4^n x)$. Montrer que f est continue mais nulle part dérivable (le point x étant fixé, on pourra étudier le taux d'accroissement en x pour $h = \pm\frac{1}{2}4^{-n}$, où le signe est choisi de sorte qu'il n'y pas d'entier entre $4^n x$ et $4^n(x+h)$).

1.3 Fonction de Pompéiu

Soit $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une énumération de $\mathbf{Q} \cap [0;1]$. Soit F la somme de la série de fonction $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}(x-r_n)^{\frac{1}{3}}$.
i) Montrer que F est un homéomorphisme de $[0;1]$ vers $[F(0);F(1)]$.
ii) Montrer :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists F'(r_n) = +\infty$$

Puis :

$$\forall x \in [0;1],\ \exists F'(x) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

On pourra remarquer que :

$$\forall u \neq v,\ u \neq 0,\ 0 \leq \frac{v^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{3}}}{v-u} \leq \frac{4}{3u^{\frac{2}{3}}}$$

iii) Etudier $G = F^{-1}$.

1.4 Théorème de Tietze

Dans tout ce qui suit, (X,d) et un espace métrique, A une partie fermée non vide de X, et $f \in C(A,\mathbf{R})$. On veut prolonger continûment f à X.
a) Montrer que l'on peut supposer f bornée avec
$\sup f = a \geq 0$ et $\inf f = -a \leq 0$.
b) Soient F et G deux fermés disjoints de X. Construire une fonction $g \in C(X,\mathbf{R})$ telle que $0 \leq g \leq 1$, $g = 0$ sur F et $g = 1$ sur G.
c) En utilisant $F = \{f \leq -\frac{a}{3}\}$ et $G = \{f \geq \frac{a}{3}\}$, trouver $g_1 \in C(X,\mathbf{R})$ telle que $\|f - g_1\|_\infty \leq \frac{2a}{3}$.
d) Construire une série de fonctions répondant à la question posée.

1.5 Théorème de Borel

a) Construire une fonction ϕ de classe C^∞, nulle hors de $[-1,1]$ et constante égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$.
b) Soient (a_n) une suite de nombres réels, (λ_n) une suite de nombres réels > 0. Montrer que l'on peut choisir λ_n de sorte que la série de fonctions

$$\sum \frac{a_n x^n}{n!} \phi(\lambda_n x)$$

converge normalement sur $\mathbf{R}$, ainsi que toutes ses séries dérivées. En déduire l'existence d'une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f^{(n)}(0) = a_n.$$

c) Soit $f \in C^\infty([a,b],\mathbf{R})$. Montrer que f se prolonge à la source $\mathbf{R}$ en une fonction C^∞ à support compact.